a

Dodawanie

Zgodnie z obietnicą zaczniemy poznawać *operacje*, zwane też *działaniami* na liczbach. „Przeprowadzanie operacji” w matematyce znaczy mniej więcej tyle, co przyrządzanie zupy studenckiej. Wrzucasz dowolne składniki i patrzysz, co wyszło. Przyjrzyjmy się takiej operacji, jak dodawanie liczb naturalnych.

Dodawanie, czyli łączenie składników

Intuicje

Dodawanie najprościej zrozumieć jako wizualne[[1]](#footnote-1) łączenie obiektów. Rozłóżmy na stole kulki[[2]](#footnote-2).

Kulki rozłożyły się na dwie widoczne grupy. W grupie po lewej stronie widzimy dwie kulki. W grupie po prawej stronie są cztery kulki. Kiedy policzymy po kolei wszystkie widoczne kulki, stwierdzimy, że jest ich sześć. Na tym polega właśnie magia dodawania. 2 kulki oraz 4 kulki to to samo, co 6 kulek. Matematycy nie lubią używać zbyt wielu słów, więc zapiszą to spostrzeżenie krócej:

Znaczek rozumiemy jako „oraz”, a znaczek jako „to to samo, co”. Znaczki te to pierwsze *symbole* matematyczne, z jakimi masz przyjemność[[3]](#footnote-3) się spotkać. Bardziej profesjonalnie symbol czytamy jako „dodać”. Mniej profesjonalnie jako „plus”. Symbol czytamy jako „równa się”. Ma on dużo szerszą i ogólniejszą rolę, niż tylko opowiadanie o łączeniu kulek. Symbol mówi tyle, że po jego lewej stronie jest dokładnie to samo, co po prawej stronie. Można na przykład zapisać, że

Pytanie tylko po co. Wróćmy lepiej do kulek, żeby oswoić się z nowym zapisem.

Dwie kule po lewej, dwie kule po prawej, razem widzimy 4 kule.

Trzy kule po lewej, cztery kule po środku, sześć kul po prawej. Razem 13 kul.

Jak już mówiliśmy, liczby w matematyce nie muszą odnosić się do żadnych konkretnych przedmiotów, takich jak kule. Istnieją one niezależnie, po prostu jako liczby. Powyższe przykłady można zapisać ogólniej, bez powiązania z kulami:

Jeśli w trakcie nauki dodawania napotkasz trudności, zawsze możesz wyobrazić lub narysować sobie odpowiedni obrazek z kulkami i policzyć je jedna po drugiej.

Dodawanie możemy rozumieć także jako powiększanie jednej liczby o drugą. Jeśli pasterz miał dziesięć owiec i postanowił dokupić siedem owiec, to teraz ma siedemnaście owiec.

Jeśli pan Janusz zjadł na śniadanie golonki, na obiad 4 golonki, a na kolację 2 golonki,[[4]](#footnote-4) to w ciągu całego dnia zjadł 9 golonek.

Jeśli 5 razy w ciągu dnia wypijesz dwie szklaneczki[[5]](#footnote-5), to łącznie wypijesz 10 szklaneczek.

W swoim czasie uzupełnię definicję formalną

Nazewnictwo

Intuicje

Być może kiedyś w życiu napotkasz następujący problem:

Jaś zjadł 3 jabłka, a Małgosia 5 jabłek. Ile jabłek zjadły razem[[6]](#footnote-6) dzieci?

Aby znaleźć odpowiedź na to intrygujące pytanie, musimy wykonać dodawanie, czyli *dodać* liczby 3 i 5. Gdy podołamy wyzwaniu i otrzymamy w odpowiedzi 8, dostaniemy *wynik* dodawania. W ogólności wykonanie dowolnego działania na liczbach zwraca wynik działania. W przypadku dodawania liczby, które dodajemy, nazywamy *składnikami*, zaś otrzymany wynik nazywamy *sumą*. Czasami samo dodawanie nazywamy też *sumowaniem*.

* W działaniu składnikami są 2 i 3, a wynikiem (sumą) 5.
* W działaniu składnikami są 3, 5 i 7, a wynikiem (sumą) 15.
* W działaniu składnikami są 9 i 5, a wynikiem (sumą) 14.

Własności dodawania

Rozszerzenie

Czyli co można powiedzieć o dodawaniu[[7]](#footnote-7). Przyjrzyjmy się ponownie kulkom:

Dodając kulki po lewej stronie do kulek po prawej stronie, otrzymamy

Nic nie stoi jednak na przeszkodzie, by w porywie szaleństwa kulki po prawej stronie dodać do kulek po lewej stronie:

Jak widać, nie ma znaczenia, w jakiej kolejności dodamy do siebie liczby, a wynik otrzymamy taki sam. Z tego powodu mówimy, że dodawanie jest *przemienne*.

Gdy do dwóch kulek dodamy jedną, otrzymamy 3 kulki. Jeśli do tych trzech kulek dołożymy jeszcze 6, to będziemy mieli 9 kulek.

Patrząc z innej strony, gdy do sześciu kulek dołożymy jedną, otrzymamy 7 kulek. Dołożenie do tych 7 jeszcze dwóch da nam razem 9 kulek.

Kiedy dodajemy więcej niż dwa składniki, możemy sumować je parami w dowolnej kolejności. Dlatego mówimy, że dodawanie jest *łączne*.

Dodawanie w słupku

Warsztat

Powiedzieliśmy trochę o samej teorii dodawania, ale cały czas nie wiemy, jak to robić w praktyce. Kiedy ktoś zapyta nas o wynik dodawania , to możemy w lewej ręce wyciągnąć 3 palce, w prawej 4 palce i policzyć, że razem wyciągnęliśmy 7 palców. Dodawanie liczb jednocyfrowych nie jest dużym wyzwaniem, szczególnie kiedy nabierze się wprawy. Gdyby ktoś napotkał jednak problemy z dodawaniem liczb rzędu 8 i 9, spieszymy z pomocą i podsuwamy zgrabną tabelkę, zwaną *tabliczką dodawania*.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Jeśli chcemy poznać wynik dodawania , szukamy ósemki u góry wśród pogrubionych liczb, a dziewiątki po lewej wśród pogrubionych liczb. Następnie jedziemy wzrokiem wzdłuż odpowiedniego rzędu i odpowiedniej kolumny i we wspólnej komórce znajdujemy wynik 17.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| **8** | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **9** | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Ponieważ dodawanie jest przemienne, możemy równie dobrze znaleźć dziewiątkę u góry i ósemkę po lewej – znowu trafimy na wynik 17.

Większy problem z dodawaniem pojawia się wtedy, gdy chcemy dodać liczby dwucyfrowe lub jeszcze większe. Oczywiście moglibyśmy rozszerzyć tabliczkę dodawania dalej niż do dziewiątki, jednak… bądźmy realistami. Bardziej pomocna okazuje się technika *dodawania w słupku* zwana też *dodawaniem pisemnym*. Najlepiej nauczmy się jej na przykładzie – bądźmy odważni i spróbujmy dodać 127 oraz 32. Piszemy dwie liczby jedna pod drugą tak, by cyfry jedności, cyfry dziesiątek, cyfry setek itd. znajdowały się jedna pod drugą (wyrównujemy do prawej) i podkreślamy tak zapisane liczby. Pod kreską wkrótce pojawi się wynik.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 7 |
| + |  | 3 | 2 |
|  |  |  |  |

Poszukiwanie wyniku polega teraz na tym, by dodawać do siebie kolejne cyfry[[8]](#footnote-8) (jedności do jedności, dziesiątek do dziesiątek itd. – w tej kolejności), a wynik dodawania zapisywać pod kreską.

* , więc pod siódemką i dwójką piszemy 9.
* , więc pod dwójką i trójką piszemy 5.
* 1 nie ma swojego towarzysza, więc przepisujemy ją w niezmienionej postaci.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 7 |
| + |  | 3 | 2 |
|  | 1 | 5 | 9 |

Wynikiem dodawania jest 159. Nie było tak źle, prawda? Spróbujmy się zmierzyć z trochę trudniejszym przypadkiem – dodajmy 256 i 947. Zaczynamy tak samo:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  |  |  |

Teraz dodajmy szóstkę do siódemki. Otrzymujemy 13 – pojawia się problem, bo przecież nie zapiszemy dwóch cyfr pod szóstką i siódemką. Zrobimy więc tak – rozbijmy 13 na dwie cyfry, pod szóstką i siódemką napiszemy 3, a 1 przenieśmy do następnej kolumny.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  |  | 3 |

Teraz dodajemy wszystkie trzy cyfry: 1, 5 i 4 – dostajemy 10. Ponieważ wynik jest dwucyfrowy, w tej kolumnie piszemy 0, a 1 przenosimy dalej.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  |  | 0 | 3 |

Dodajemy . Wynik 12 rozbijamy na 2 i 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
|  | 2 | 0 | 3 |

Przeniesiona jedynka jest samotna, więc przepisujemy ją bez zmian.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  |
|  | 2 | 5 | 6 |
| + | 9 | 4 | 7 |
| 1 | 2 | 0 | 3 |

Dostaliśmy wynik: . Jeśli dodawanie w słupku sprawia wrażenie czarnej[[9]](#footnote-9) magii, prześledź jeszcze kilka przykładów:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 1 |  |  |
|  | 1 | 2 | 5 | 6 |
| + |  | 3 | 9 | 1 |
|  | 1 | 6 | 4 | 7 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |
|  | 9 | 1 | 5 | 6 | 4 | 3 |
| + | 2 | 0 | 0 | 5 | 6 | 9 |
| 1 | 1 | 1 | 6 | 2 | 1 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 2 | 1 |  |
|  |  | 2 | 4 | 5 | 1 |
|  | 8 | 1 | 3 | 6 | 2 |
| + |  | 5 | 0 | 9 | 8 |
|  | 8 | 8 | 9 | 1 | 1 |

Rozszerzenie

Być może jesteś ciekaw, dlaczego magiczna metoda dodawania w słupku jest matematycznie poprawna. Czemu jakieś dodawanie cyfr w kolumnach i przepisywanie jedynek do kolejnej kolumny w ogóle działa? W pierwszym przykładzie stosunkowo łatwo to zrozumieć. 127 można zapisać jako , a 32 jako . W takim razie

Ponieważ dodawanie jest przemienne, nie ma znaczenia kolejność zapisania składników, więc:

Ponieważ dodawanie jest łączne, możemy zająć się tą sumą tak, jak nam wygodnie:

W gruncie rzeczy to, co uczyniliśmy, to właśnie sumowanie cyfr jedności (7 + 2), dziesiątek (20 + 30) i setek (100), by otrzymać wynik końcowy. Tak jak w słupku. Zobaczmy jeszcze jak działa 256 + 947 = 1203:

ustalamy wygodną kolejność składników

dodajemy cyfry jedności

rozbijamy 13 na dwie cyfry

dodajemy cyfry dziesiątek

dodajemy cyfry setek

rozbijamy 12 na 1 i 2

Dla przejrzystości zapisaliśmy to działanie w kilku linijkach. Kiedy przenosimy nasze obliczenia do następnej linijki w miejscu znaku równości, zwyczajowo zapisujemy dwa razy: na końcu poprzedniej linijki i na początku nowej.

Jeżeli wykazujesz skrajny cynizm[[10]](#footnote-10), będziesz oczekiwał bardziej formalnego wyjaśnienia zagadki dodawania w słupku. Proszę bardzo:

Dowód

[wymagana znajomość tematu: Algebra]

uzupełnię w odpowiednim czasie

1. Takie że widzisz [↑](#footnote-ref-1)
2. Jak prawdziwi matematycy [↑](#footnote-ref-2)
3. Czujesz ją? [↑](#footnote-ref-3)
4. To ile czasu spędzi w toalecie? [↑](#footnote-ref-4)
5. soku [↑](#footnote-ref-5)
6. Tak naprawdę nie wiadomo. Niektóre jabłka mogły zjeść osobno. [↑](#footnote-ref-6)
7. Oprócz tego, że jest świetną zabawą [↑](#footnote-ref-7)
8. Dobrze, masz rację. Dodajemy do siebie LICZBY reprezentowane przez cyfry. Lepiej Ci? [↑](#footnote-ref-8)
9. Masz problem z poprawnością polityczną? [↑](#footnote-ref-9)
10. To znaczy, że jesteś prawdziwym matematykiem. [↑](#footnote-ref-10)